УДК 519.688

А. А. Дубровина

Применение методов условной многомерной минимизации к задаче расчета траектории баллистической ракеты

Рассмотрена задача расчета приблизительной траектории баллистической ракеты, обеспечивающего попадание ракеты из заданной точки старта в точку финиша и охватывающего весь диапазон дальностей для ракет рассматриваемого типа. Траектория ракеты задана системой нелинейных дифференциальных уравнений. Достижение различной дальности обеспечено изменением начальных значений угла наклона траектории и времени работы ступеней. В связи с физическим смыслом на эти переменные наложены ограничения. Решена задача многомерной условной минимизации методом барьерных функций с минимизацией методом Нелдера – Мида.

Ключевые слова: траектория баллистической ракеты, условная многомерная минимизация.

Введение

В данной статье поставлена задача рассчитать приблизительную траекторию баллистической ракеты, обеспечивающую попадание из заданной точки старта в точку финиша, охватив весь диапазон дальностей для ракеты рассматриваемого типа.

В качестве примера выбрана межконтинентальная баллистическая ракета (МБР) с диапазоном дальностей от 5000 км до 10 000–13 000 км (в зависимости от модели). Каждой дальности соответствуют определенные значения параметров запуска (угол атаки, продолжительность работы ступеней, запас топлива, угол наклона траектории). Обычно управление осуществляется по углу атаки. Его зависимость от времени описывается функцией, зависящей от модели ракеты. Общедоступные данные об этой функции отсутствуют.

Расчет траектории можно значительно упростить, приняв угол атаки равным нулю и выбрав в качестве изменяемых параметров величины, которые можно задать дискретно (угол наклона траектории и продолжительность работы каждой из ступеней). Предполагается, что, изменив перечисленные выше параметры, можно достичь заданного диапазона дальностей с заданной точностью, оставаясь в рамках физической реализуемости и соответствия эталонным данным.

Система уравнений для расчета траектории МБР

В качестве объекта исследования выбрана межконтинентальная баллистическая ракета типа земля – земля.

Приняты следующие допущения:
- Земля – сферическая;
- учитывается вращение Земли;
- модель атмосферы – экспоненциальная;
- сила тяги постоянна для каждой из ступеней;
- ускорение свободного падения не изменяется в зависимости от широты и включает только радиальную составляющую, но меняется в зависимости от высоты;
- аэродинамические коэффициенты постоянны.

Уравнения движения центра масс, записанные относительно наблюдаемой скорости, при учете принятых допущений в проекциях на оси полускоростной системы координат имеют вид [1, 2]:

$$\frac{dm}{dt} = \mu;$$

$$m\frac{d\nu}{dt} = P\cos\alpha - \frac{\rho\nu^2}{2}S\left(C_x^{\alpha^2}\alpha^2 + C_x\right) - -mg\sin\theta - mr(\cos\theta\cos\psi_a\cos\varphi + +\sin\theta\sin\varphi); \quad (1)$$

$$m\nu\frac{d\theta}{dt} = P\sin\alpha + \frac{\rho\nu^2}{2}SC_y^{\alpha}\alpha - mg\cos\theta - -2m\nu\omega\sin\psi_a\cos\varphi - m\omega^2 r\sin\varphi\times \times(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\psi_a\cos\varphi) + \frac{\nu^2}{r}m\cos\theta;$$

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{-(r-R_z)}{7170}};$$

$$\frac{dr}{dt} = \nu \sin\theta;$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{-\nu\cos\theta\sin\psi_a}{r\cos\varphi};$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\nu\cos\theta\cos\psi_a}{r}; \qquad (1)$$

$$g = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Здесь m – масса ракеты с топливом (кг);

t – время (с);

μ – скорость расхода топлива (кг/с);

ν – скорость ракеты (м/с);

P – сила тяги, постоянная до момента полного расхода топлива, после – равная нулю (кг · м/с^2);

α – угол атаки, т. е. угол между проекцией вектора ν скорости на плоскость симметрии и продольной осью летательного аппарата (град);

ρ – плотность атмосферы, $\rho_0 = 1{,}225$ (кг/м^3);

S – характеристическая площадь (м^2);

$C_x^{\alpha^2}$, C_x, C_y^{α} – аэродинамические коэффициенты (1/град^2, безразмерный, 1/град соответственно);

g – сила тяжести (кг · м/с^2);

θ – угол наклона траектории (град);

r – расстояние до центра Земли (м);

ψ_a – азимут запуска, т. е. курс на конечную точку из точки старта (рад);

φ – широта (град);

ω – угловая скорость вращения Земли, равная $7{,}292115078 \cdot 10^{-5}$ (с$^{-1}$);

R_z – радиус Земли, равный 6 378 245 (м);

λ – долгота (град);

G – гравитационная постоянная, равная $6{,}67408(31) \cdot 10^{-11}$ (м^{3}с$^{-2}$кг$^{-1}$);

M – масса Земли, составляющая $5{,}97219 \cdot 10^{24}$ (кг).

Решение системы уравнений (1) осуществляется путем численного интегрирования. В качестве критерия точности выбрана невязка, заданная функцией начального значения угла наклона траектории и продолжительности работы каждой из трех ступеней:

$$J(\theta_{\text{нач}}, t_1, t_2, t_3) = \left((\varphi_{\text{кон}}) - \varphi(\theta_{\text{нач}}, t_1, t_2, t_3)\right)^2 + \\ + \left((\lambda_{\text{кон}}) - \lambda(\theta_{\text{нач}}, t_1, t_2, t_3)\right)^2,$$

где $\theta_{\text{нач}}$ – начальное значение угла наклона траектории;

t_1, t_2, t_3 – время работы первой, второй и третьей ступени соответственно;

$\varphi_{\text{кон}}$, $\lambda_{\text{кон}}$ – заданные координаты конечной точки;

$\varphi(\theta_{\text{нач}}, t_1, t_2, t_3)$, $\lambda(\theta_{\text{нач}}, t_1, t_2, t_3)$ – координаты конечной точки, полученные в результате решения системы уравнений.

Данный критерий отражает точность приведения летательного аппарата в заданную точку пространства и является функцией нескольких переменных.

В связи с физическим смыслом на переменные накладываются следующие ограничения:

$$45° \le \theta_{\text{нач}} \le 89°, \quad 0 \le t_1 \le t_{1\max},$$

$$0 \le t_2 \le t_{2\max}, \quad 0 \le t_3 \le t_{3\max},$$

где $t_{1\max}$, $t_{2\max}$, $t_{3\max}$ – максимальное время работы первой, второй и третьей ступени соответственно.

Следовательно, для решения данной задачи необходимо использовать методы условной многомерной минимизации.

Методы условной многомерной минимизации

Целевая функция задана системой дифференциальных уравнений, поэтому применение семейства методов, в которых используется производная целевой функции, невозможно. Метод замены переменных также неудобен для рассматриваемой задачи. Кроме того, были рассмотрены методы, в основе которых лежит сведение задачи минимизации с ограничениями к задаче минимизации некоторой функции без ограничений. При этом вводится вспомогательная функция, представляющая собой сумму минимизируемой функции и функции штрафа, в которой учитываются ограничения.

Метод штрафных функций

Подбирается вспомогательная функция, совпадающая с заданной минимизируемой

| ISSN 2542-0542 Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей» | № 3, 2017

функцией внутри допустимой области и быстро возрастающая вне ее:

$$F(\mathbf{x},\, l) = f(\mathbf{x},\, l) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i\left(g_i(\mathbf{x}),\, l\right),$$

где $f(\mathbf{x},\, l)$ – исходная минимизируемая функция;

$\mathbf{x} = [x_0,\, ...,\, x_n]$;

n – количество переменных;

l – некоторый векторный параметр, $l = \{l_i\}$, $i = \overline{1,\, n}$;

$g_i(\mathbf{x})$ – ограничения, $g_i(\mathbf{x}) \le 0$.

Здесь также $\psi_i\left(g_i(\mathbf{x}),\, l_i\right)$ – функция штрафа, обладающая свойствами [3]:

$$\lim_{l_i \to \infty}\left(\psi_i\left(g_i(\mathbf{x}),\, l_i\right)\right) = \\ = \begin{cases} 0 \quad \text{при } g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = \overline{1,\, n}; \\ +\infty \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Данный метод требует дополнительных исследований для определения функций вида $\psi_i\left(g_i(\mathbf{x}),\, l_i\right)$ и значений l_i, $i = \overline{1,\, n}$.

Метод барьерных функций

Этот метод имеет вид

$$F(\mathbf{x},\, l) = f(\mathbf{x},\, l) - k\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}, \quad k > 0.$$

Когда $\mathbf{x}$ приближается к границам области X (изнутри), значения по меньшей мере одной из ограничивающих функций приближаются из области отрицательных значений к нулю. В этом случае к функции $f(\mathbf{x})$ добавляется большая положительная величина. При $k \to 0$ минимум функции $F(\mathbf{x},\, k)$ стремится к минимуму функции $f(\mathbf{x})$ с ограничениями $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ [3]. Существенным преимуществом данного метода является то, что при его использовании для вычисления вспомогательной функции не требуются дополнительные исследования. По этой причине был выбран метод барьерных функций.

Для нахождения минимума полученной вспомогательной функции использован метод Нелдера – Мида.

Результаты расчетов траектории МБР

Траектория МБР рассчитана с использованием численного интегрирования двухшаговым методом Эйлера, имеющим второй порядок точности (шаг интегрирования 0,0005 с), метода барьерных функций и минимизации разницы расчетных и заданных координат точки финиша с помощью метода Нелдера – Мида. В качестве исходных были использованы данные по МБР Minuteman [4, 5]. Полученные траектории для различных дальностей представлены на рисунке.

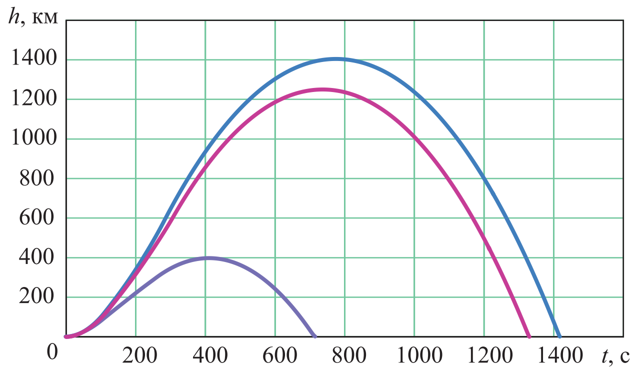

Рисунок. Результаты расчета траектории МБР дальности (км):
– 5000; – 9000; – 12 000

Заключение

Полученные результаты соответствуют физическому смыслу и эталонным данным, что позволяет сделать вывод: с помощью метода барьерных функций и метода Нелдера – Мида можно охватить необходимый диапазон дальностей полета баллистической ракеты с достижением точности, соответствующей техническим характеристикам баллистической ракеты.

Данная задача решена в рамках программного изделия «Форт» и используется для распознавания различных оперативно-тактических ситуаций с целью формирования своевременной и достоверной информации предупреждения о воздушно-космическом нападении. Рассчитанные траектории баллистических ракет отображаются на 2D- и 3D-картах.

Список литературы

1. *Гуков В. В.* Основы теории полета летательных аппаратов. М.: МАИ, 1978. 70 с.

2. *Федосьев В. И., Синярев Г. Б.* Введение в ракетную технику. М.: Оборонгиз, 1961. 506 с.

3. Методы математического программирования в задачах оптимизации сложных технических систем / *А. М. Загребаев, Н. А. Крицына, Ю. П. Кулябичев, Ю. Ю. Шумилов*. М.: МИФИ, 2007. 332 с.

4. *Карпенко А. В.* Межконтинентальная баллистическая ракета LGM-30G Minuteman-3 (США) // Военно-технический сборник «Бастион». 04.04.2008. URL: http://bastion-karpenko.ru/minuteman-3 (дата обращения 10.12.2017).

5. Межконтинентальные баллистические ракеты СССР (РФ) и США. История создания, развития и сокращения / *Е. Б. Волков, А. А. Филимонов, В. Н. Бобырев, В. А. Кобяков*; под ред. *Е. Б. Волкова*. М.: ЦИПК РВСН, 1996. С. 179–207.

Поступила 30.11.17

Дубровина Анна Александровна – ведущий специалист АО «Концерн «РТИ Системы», Москва.

Область научных интересов: математическое обеспечение, баллистика летательных аппаратов, математическое моделирование.

Application of methods of conditional multidimensional minimization to the ballistic trajectory calculation problem

The paper focuses on the problem of calculating the approximate ballistic missile trajectory, the calculation ensuring that the missile travels from a given launch point to the finish point and covering the entire range rate for the missiles of the type considered. The missile trajectory is defined by a system of nonlinear differential equations. A different range is achieved by changing the initial values of the flight-path angle and the operating time of the missile stages. Due to the physical significance, these variables are constrained. The problem of multidimensional conditional minimization by the method of barrier functions with minimization of Nelder – Meed method.

Keywords: ballistic missile trajectory, conditional multidimensional minimization.

Dubrovina Anna Alexandrovna – Leading Specialist of Joint Stock Company “Concern “Radio Technical and Information Systems”, Moscow.

Science research interests: mathematical support, flight ballistics, mathematical simulation.