



Математическая модель следящих систем с учетом нелинейностей переменных состояния

С помощью математического моделирования можно проверить правильность работы проектируемой следящей системы перед технической реализацией, однако линейные модели не позволяют оценить влияние конструктивных ограничений, учет которых приводит к появлению нелинейностей. Представлен подход, позволяющий спроектировать и реализовать модель динамической следящей системы с учетом нелинейностей по моменту и переменных состояния, при котором используются коэффициенты желаемой передаточной функции. Приведены результаты моделирования в среде *MATLAB/Simulink* с учетом различных нелинейностей.

Ключевые слова: следящая система, желаемая передаточная функция, пространство состояний, нелинейности переменных состояния, нормальная форма Коши.

Введение

Во время проектирования следящих систем необходимо убедиться в правильности работы разрабатываемой системы. Моделирование – эффективный инструмент для оценки параметров следящей системы, выбора технических решений и предъявления требований к составным частям следящих систем. Для объекта управления [1] без ограничений синтезировать регулятор в классе линейных систем не представляет сложности. В одном из наиболее применяемых методов синтеза используется желаемая передаточная функция, которая, как системная функция, описывает поведение системы в целом. Однако наличие конструктивных ограничений объекта управления [2, 3] переводит систему в класс нелинейных [2].

Обычно для моделирования работы следящей системы с учетом нелинейностей используют следующий подход: в классе линейных систем по заданному объекту управления и рассчитанной желаемой передаточной функции синтезируется устройство управления, затем в модели объекта управления устанавливаются нелинейности и оцениваются показатели качества следящих систем с учетом имеющихся конструктивных ограничений [4]. Однако на ранних стадиях проектирования структура и большинство параметров объекта управления часто неизвестны, поэтому использовать описанный подход затруднительно.

В настоящей статье представлен подход к созданию модели, позволяющей учесть

конструктивные ограничения на переменные состояния (скорость и ускорение) и нелинейность по моменту нагрузки. Для применения предложенного подхода не требуются конкретные знания об объекте управления, в нем используются коэффициенты желаемой передаточной функции линейной системы. Такой подход удобен на ранних стадиях проектирования.

Математическая модель следящей системы

За основу линейной модели следящей системы, как было указано ранее, взята желаемая передаточная функция замкнутой следящей системы, имеющая вид

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{\Delta_{k-1}\omega_0 p^{k-1} \dots \Delta_1 \omega_0^{k-1} p + \Delta_0 \omega_0^k}{\Delta_1 p^l + \Delta_{l-1} \omega_0 p^{l-1} \dots \Delta_1 \omega_0^{l-1} p + \Delta_0 \omega_0^l} \quad (1)$$

где Δ_i – коэффициенты стандартной передаточной функции, получаемые в соответствии с таблицей коэффициентов стандартной передаточной функции;

k, l – порядок полинома числителя и знаменателя желаемой передаточной функции замкнутой системы соответственно;

$\omega_0 = tmp/tp$ – временной масштабный коэффициент, учитывающий время регулирования;

tmp – табличный параметр;

tp – время регулирования.

Передаточная функция (1) описывает работу замкнутой следящей системы (рис. 1, а). Желаемую передаточную функцию можно рассчитывать разными методами при различных критериях к качеству функционирования следящих систем. Так, например, можно задаться

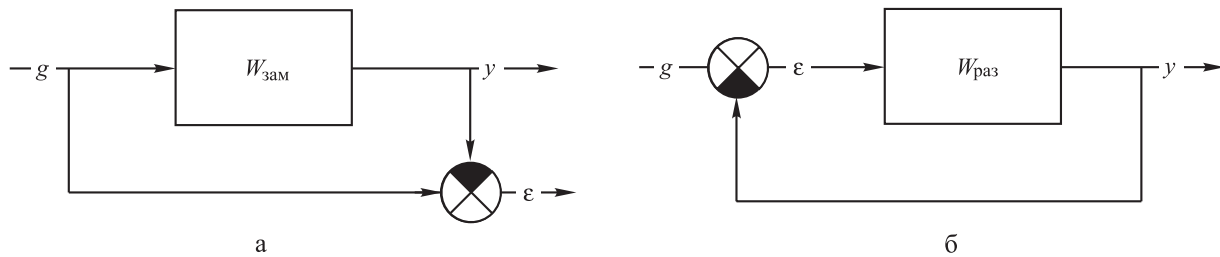


Рис. 1. Структурная схема замкнутой (а) и разомкнутой (б) следящей системы:
 ϵ – сигнал ошибки; g – входное воздействие; y – реакция системы

показателями качества (временем регулирования и перерегулированием) и требованиями по отработке с нулевыми ошибками полиномиальных воздействий различной степени для астатических систем.

На практике часто возникает необходимость моделирования систем, структуры которых соответствуют разомкнутым следящим системам, подобно приведенной на рис. 1, б.

Передаточная функция такой следящей системы имеет вид

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{W_{\text{зам}}}{1 - W_{\text{зам}}} = \frac{\eta_m p^m + \eta_{m-1} p^{m-1} + \dots + \eta_1 p + \eta_0}{\delta_n p^n + \delta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (2)$$

где η, δ – коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы соответственно, значения которых определяются коэффициентами желаемой передаточной функции (1);

m, n – порядок полинома числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы соответственно.

Для получения возможности накладывать ограничения и учитывать нелинейности переменных состояния и момента нагрузки необходимо найти представление системы в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши [5]. От передаточной функции разомкнутой системы (2) перейдем к дифференциальному уравнению

$$y^{(n)} + \frac{\delta_{n-1}}{\delta_n} y^{(n-1)} + \dots + \frac{\delta_0}{\delta_n} y = \frac{\eta_m}{\delta_n} g^{(m)} + \frac{\eta_{m-1}}{\delta_n} g^{(m-1)} + \dots + \frac{\eta_0}{\delta_n} g. \quad (3)$$

Дифференциальному уравнению (3) соответствует система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + F_1 g; \\ \dot{y}_2 = y_3 + F_2 g; \\ \dots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n + F_{n-1} g; \\ \dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{n-1} y_n + F_n g \end{cases} \quad (4)$$

или матричном виде

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bg; \\ y = Cy. \end{cases}$$

В системе (4) $y_1 = y, y_2 = \frac{dy}{dt}, \dots, y_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$;

$a_0 = \frac{\delta_0}{\delta_n}, \dots, a_{n-1} = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_n}, a_n = 1$. Функции $F_i(t)$,

$i = 1, \dots, n$ вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$F_i(t) = b_{n-1}(t) - \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{i-k} C_{n+s-i}^{n-i} a_{n-i+k+s}(t) \frac{d^s F_k}{dt^s},$$

в которой

$$C_{n+s-i}^{n-i} = \frac{(n-i+s)!}{(n-i)!s!},$$

а F_k рассчитываются следующим образом:

$$F_0 = b_n,$$

$$F_1 = b_{n-1} - a_{n-1} F_0,$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= b_{n-2} - a_{n-1}F_1 - a_{n-2}F_0, \\
 &\vdots \\
 F_j &= b_{n-j} - \sum_{m=0}^{j-1} a_{n-j+m}F_m,
 \end{aligned}$$

где $b_0 = \frac{n_0}{\delta_n}, \dots, b_m = \frac{\eta_m}{\delta_n}$.

При таком выборе переменных состояния матрицы системы имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = (F_1(t) \quad F_2(t) \quad \dots \quad F_{n-1}(t) \quad F_n(t))^T,$$

$$\mathbf{C}^T = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0).$$

На рис. 2 представлена структурная схема, построенная по системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (4).

Теперь рассмотрим математическое описание типовых нелинейностей, которые предполагается использовать при моделировании

конструктивных ограничений (переменных состояния и нелинейности момента нагрузки привода).

Модель нелинейности типа «насыщение» по отношению к переменной состояния $y^{(k)}$ имеет вид

$$\bar{y}^{(k)} = \begin{cases} y^{(k)}, & |y^{(k)}| < y_{\max}^{(k)}; \\ y_{\max}^{(k)} \text{sign}(y^{(k)}), & |y^{(k)}| \geq y_{\max}^{(k)}. \end{cases}$$

Приведем модель ограничения на минимальное значение переменной состояния $y^{(k)}$

$$\bar{y}^{(k)} = \begin{cases} 0, & |y^{(k)}| \leq y_{\min}^{(k)}; \\ y^{(k)}, & |y^{(k)}| \geq y_{\min}^{(k)} \end{cases}$$

и модель нелинейности по моменту

$$M_c = M_{н0}(ky + 1), \tag{5}$$

где $M_{н0}$ – номинальное (среднее) значение момента нагрузки;

k – коэффициент зависимости момента нагрузки от выходной переменной (например, от угла поворота вала привода).

Также рассмотрим модель сухого трения на валу привода. Момент статического сопротивления механизма представляется как нелинейная функция четырех переменных [6, 7]:

$$M_c = M_c(\omega, M_{тр}, M_d), \tag{6}$$

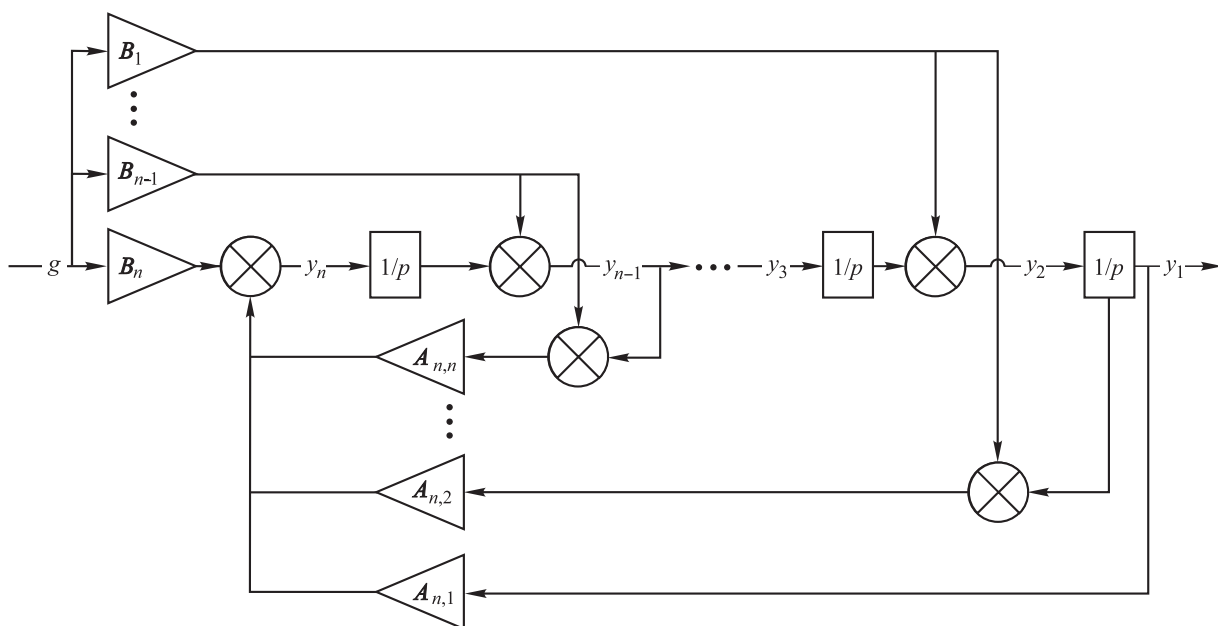


Рис. 2. Структурная схема системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши; коэффициенты $A_{n,i}$ и B_j – элементы матрицы A и вектор-столбца B



где $M_{тр}$ – момент сухого трения скольжения (постоянная положительная величина);

M_d – момент двигателя.

Функция (6) представляется в виде

$$M_c = \begin{cases} M_{тр} \operatorname{sign} \omega & \text{при } \omega \neq 0; \\ f(M_d) & \text{при } \omega = 0; \end{cases}$$

$$f(M_d) = \begin{cases} M_d & \text{при } |M_d| \leq M_{тр}; \\ M_{тр} \operatorname{sign}(M_d) & \text{при } |M_d| > M_{тр}. \end{cases}$$

Такое представление момента позволяет учитывать нелинейные свойства сил трения и неупругой деформации как при движении, так и в покое, включая условия трогания и остановки механизмов.

Программная модель следящей системы

В среде *MATLAB/Simulink* на основе описанного выше алгоритма была спроектирована и реализована модель следящей системы, учитывающая ограничения скорости и ускорения системы, а также нелинейности момента нагрузки привода. В качестве параметров могут быть заданы коэффициенты дифференциального уравнения, параметры ограничений, конструктивная постоянная электропривода и

момент инерции. Модель *Simulink* приведена на рис. 3.

В качестве примера рассмотрим астатическую следящую систему порядка $l = 3$, обладающую порядком астатизма по входному воздействию $\nu_g = 2$, которая в соответствии с формулой (1) и численными значениями коэффициентов [8] $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 6,35, \Delta_2 = 5,1, \Delta_3 = 1$ и $\omega_0 = 1$ описывается желаемой передаточной функцией

$$W_{зам}(p, \omega_0) = \frac{\Delta_1 \omega_0^2 p + \Delta_0 \omega_0^3}{\Delta_3 p^3 + \Delta_2 \omega_0 p^2 + \Delta_1 \omega_0^2 p + \Delta_0 \omega_0^3} = \quad (7)$$

$$= \frac{6,35 p + 1}{p^3 + 5,1 p^2 + 6,35 p + 1},$$

Ставятся задачи оценки показателей качества астатической следящей системы с учетом нелинейностей и ухудшения этих показателей по сравнению с линейной.

Рассмотрены конструктивные ограничения и параметры системы:

- ограничение на максимальное значение ускорения и скорости $\dot{y}_{\max} = 2 \text{ рад/с}^2$; $\dot{y}_{\max} = 0,6 \text{ рад/с}$;

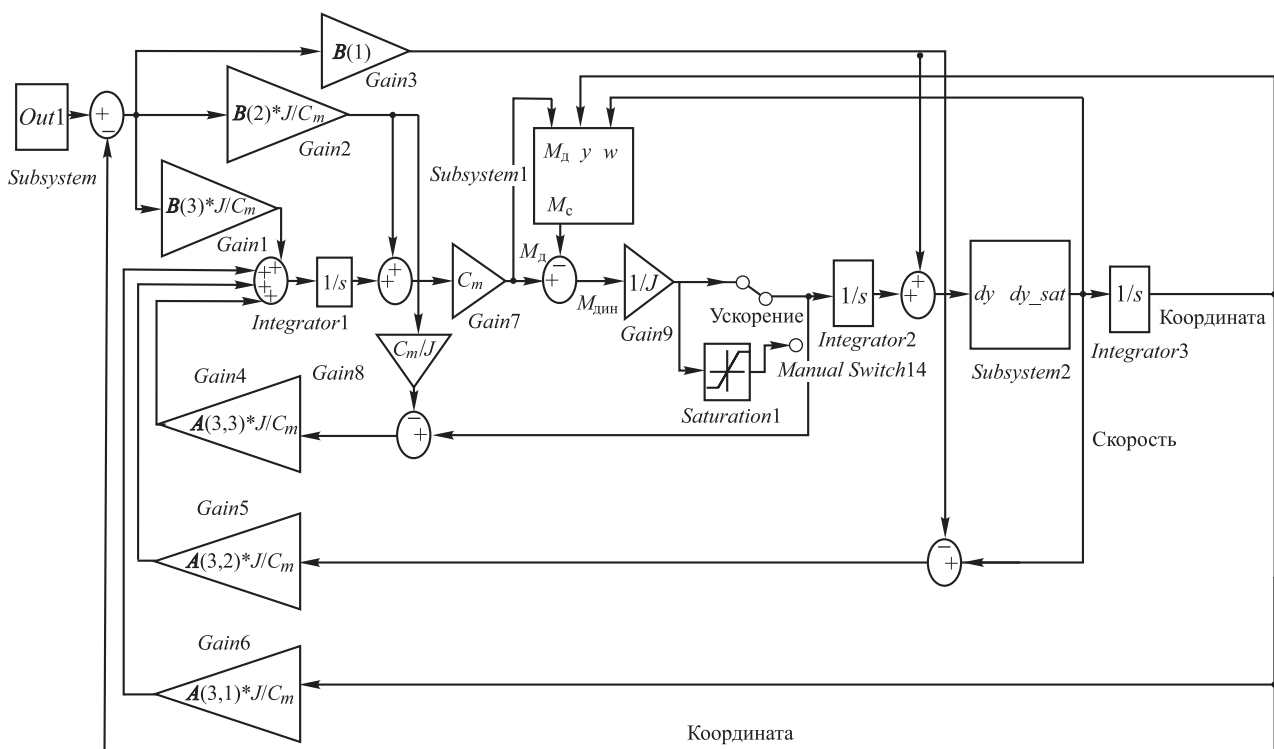


Рис. 3. Схема модели *Simulink*:
 $M_{дин}$ – динамический момент

- ограничение на минимальное значение скорости $|\dot{y}_{\min}| = 0,05$ рад/с;
- нелинейность по моменту вида (5), где $M_{н0} = 0,1$ Н·м, $k = 0,2$;
- нелинейность по моменту с учетом сухого трения в соответствии с нелинейной функцией (6);
- конструктивная постоянная электропривода $C_m = 1,82$ Н·м/А и момент инерции соответственно $J = 0,022$ Н·м².

С учетом (2) и (7) перейдем к передаточной функции разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{6,35p + 1}{p^3 + 5,1p^2}. \quad (8)$$

Передаточной функции (8) соответствует дифференциальное уравнение

$$6,35\dot{g} + g = \ddot{y} + 5,1\dot{y}. \quad (9)$$

Тогда, согласно описанному выше алгоритму, матрицы системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, соответствующей дифференциальному уравнению (9), имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5,1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6,35 \\ -31,385 \end{pmatrix},$$

а систему запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = y_3 + 6,35g; \\ \dot{y}_3 = -0y_1 - 0y_2 - 5,1y_3 - 31,385g. \end{cases} \quad (10)$$

По системе (10) в среде *MATLAB/Simulink* была построена модель (см. рис. 3), где, согласно (10), $A(3,1) = 0$, $A(3,2) = 0$, $A(3,3) = -5,1$, $B(1) = 0$, $B(2) = 6,35$, $B(3) = -31,385$.

В схеме использованы следующие блоки:

- подсистема входного воздействия *Subsystem* (рис. 4, а);
- подсистема нелинейностей скорости *Subsystem2* (рис. 4, б);
- подсистема нелинейностей момента *Subsystem1* (рис. 4, в);

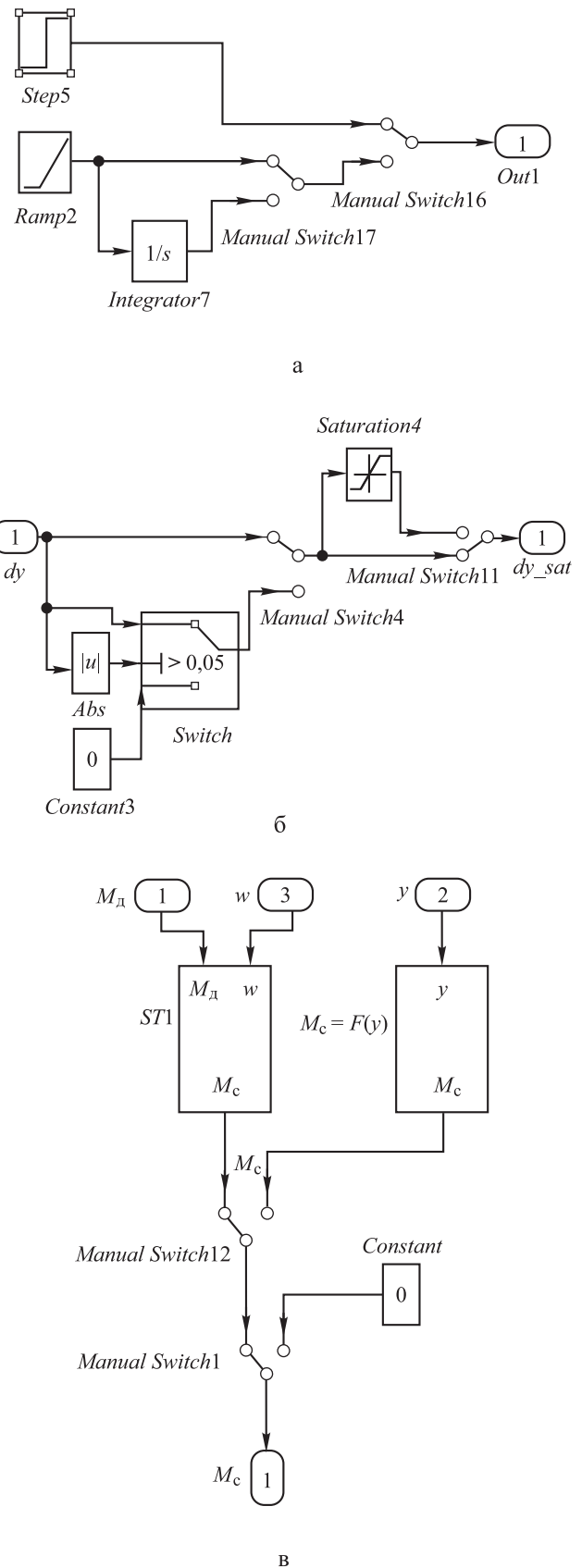


Рис. 4. *Subsystem* (а), *Subsystem2* (б) и *Subsystem1* (в): *ST1* – нелинейность в соответствии с нелинейной функцией (6); $M_c = F(y)$ – нелинейность по моменту в соответствии с уравнением (5)



• интеграторы *Integrator1*, *Integrator2*, *Integrator3*;

• усилительные звенья *Gain1*, *Gain2*, *Gain3*, *Gain4*, *Gain5*, *Gain6*, *Gain7*, *Gain8*, *Gain9*;

• элемент типа «насыщение» *Saturation1*.

Анализ результатов

С помощью реализованной модели было проведено несколько экспериментов с разным набором нелинейностей.

1. Нелинейность вида «насыщение» по ускорению и скорости, т. е. ограничение на

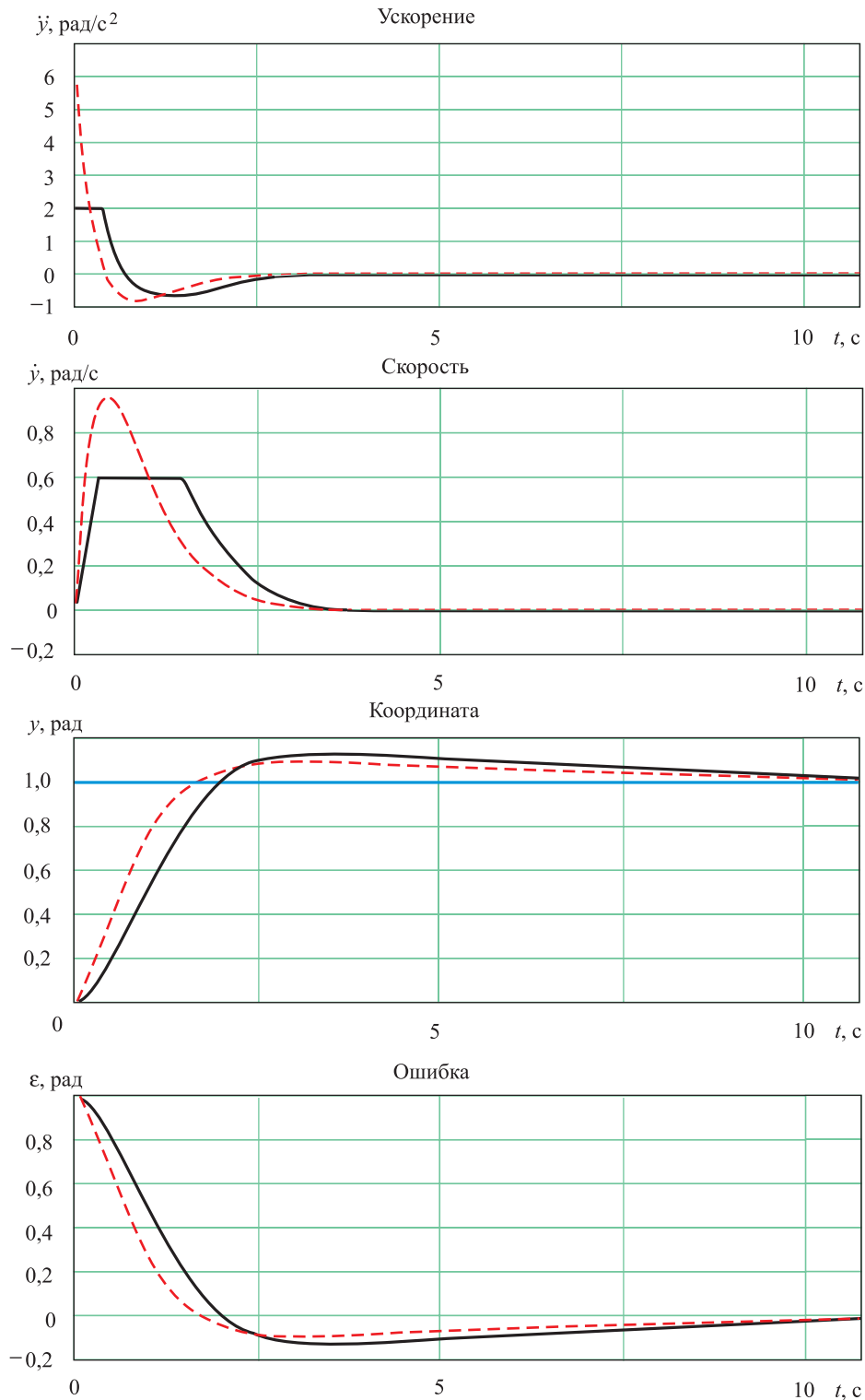


Рис. 5. Поведение системы с нелинейностью вида «насыщение» по скорости и ускорению:

---, — — поведение линейной и нелинейной систем;
 — — входное воздействие



максимальную величину переменной состояния (рис. 5). На графиках ускорения и скорости можно видеть прямые участки, которые у линейной системы отсутствуют, – это участки, на которых сработали ограничения. Нелинейности вида «насыщение» по скорости и ускорению привели к затягиванию переходного процесса и увеличению перерегулирования относительно линейной системы.

2. Нелинейность вида «мертвая зона», т. е. ограничение на минимальное значение скорости (рис. 6). Нелинейность этого вида приводит к возникновению в системе автоко-

лебаний по ускорению и скорости при работе системы на малых скоростях, в результате возникает выходной сигнал «ступенчатого» вида. Относительно линейной системы переходный процесс в нелинейной системе также будет затягиваться.

3. Нелинейность по моменту нагрузки вида $M_c = F(y)$. Поведение системы изображено на рис. 7, а. Зависимость момента нагрузки от угла показана на рис. 7, б. В линейной системе момент нагрузки оставался постоянным. Как видно, увеличение момента нагрузки с увеличением координаты приводит к затя-

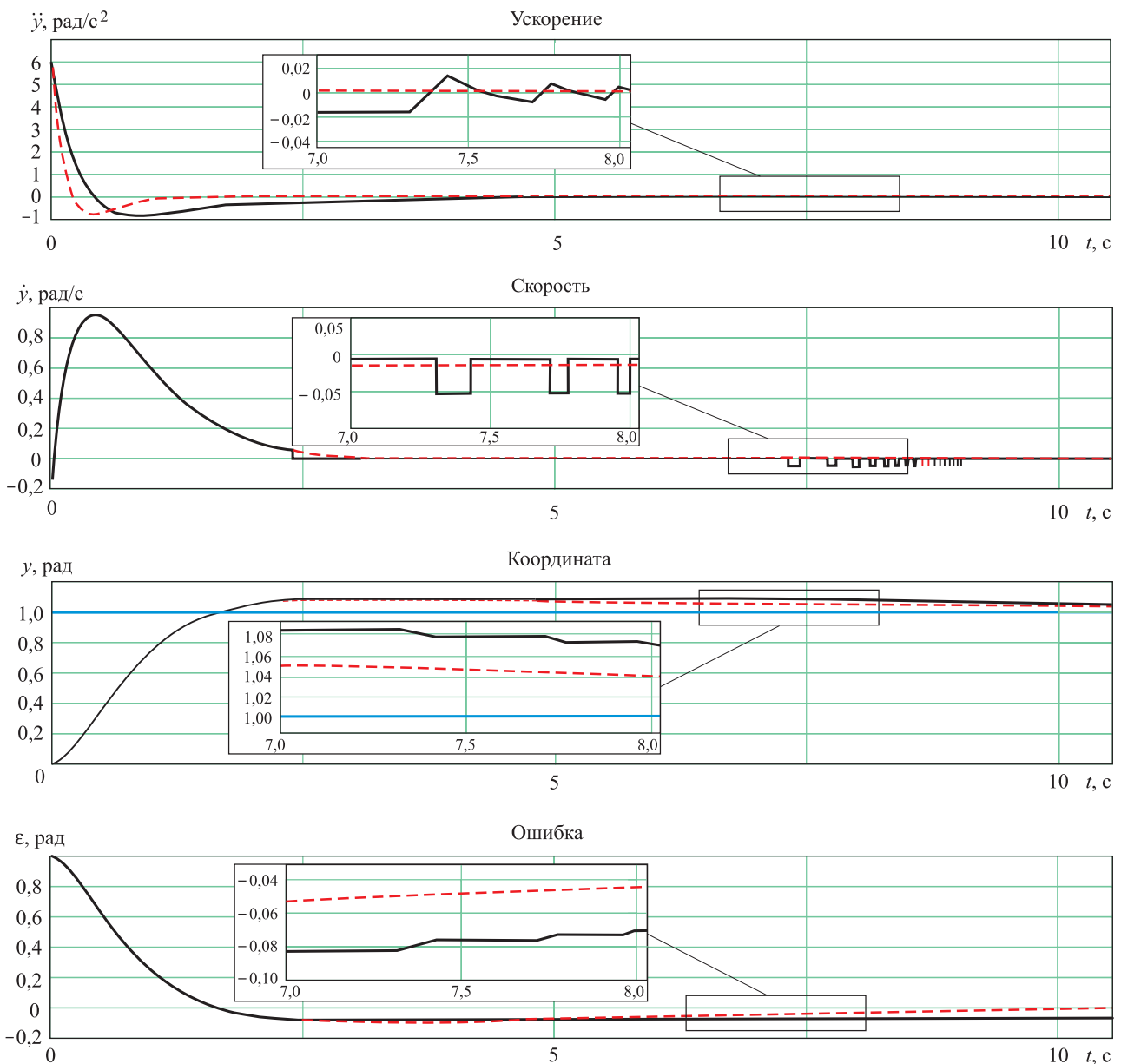


Рис. 6. Поведение системы с ограничением на минимальную величину скорости:

—, — — — поведение линейной и нелинейной систем;
— — — входное воздействие

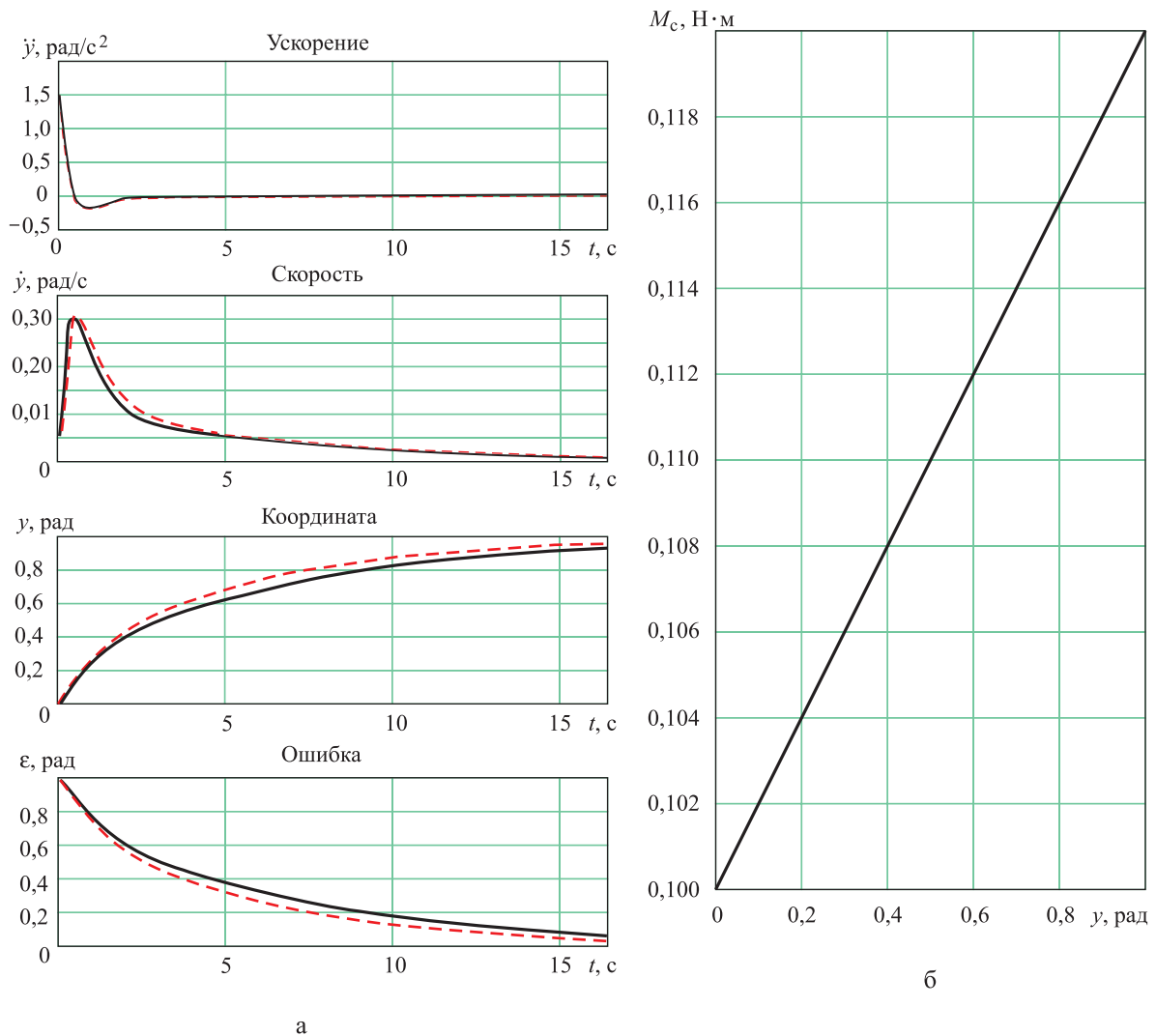


Рис. 7. Поведение системы с нелинейностью вида $M_n = F(y)$ (а) и зависимость момента $M_c = F(y)$ от координаты угла (б)

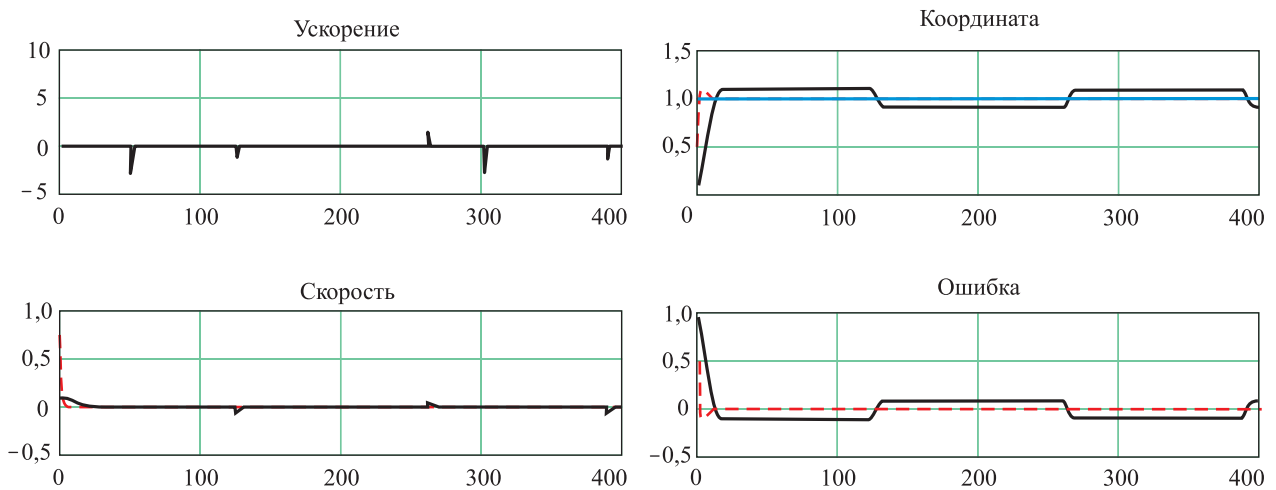


Рис. 8. Поведение системы с нелинейностью момента с учетом сил трения и упругой деформации:
 - - , — — поведение линейной и нелинейной систем;
 — — входное воздействие



гиванию переходного процесса относительно линейной системы с постоянным моментом нагрузки.

4. Нелинейность по моменту с учетом сил трения. Поведение системы отображено на рис. 8. Переходный процесс значительно увеличился по сравнению с линейной системой. Кроме того, при работе системы на малых скоростях возникают автоколебания как по ускорению и скорости, так и по координате.

Выводы

Разработана математическая модель динамической следящей системы, учитывающей нелинейности переменных состояния. В отличие от других известных следящих систем она основана на линейной модели замкнутой следящей системы в виде системной функции, а именно, желаемой передаточной функции.

Желаемая передаточная функция может быть построена по различным критериям, например, для астатических систем с заданным временем регулирования и перерегулированием. Модель можно применять для моделирования работы следящих систем с различными нелинейностями переменных состояния, системотехнических расчетов на ранних стадиях проектирования, предъявления требований к составным частям следящих систем (например, к параметрам исполнительного механизма, минимальной скорости системы, неравномерности механической части и т. п.).

В среде *MATLAB/Simulink* реализована программная параметрическая модель с возможностью исследовать поведение как линейных, так и имеющих следующие нелинейности переменных состояния:

- «насыщение» по ускорению и скорости (т. е. ограничение на максимальную величину);
- «мертвая зона» по скорости (т. е. ограничение на минимальную величину);
- нелинейность по моменту нагрузки вида $M_n = F(y)$ (зависимость момента нагрузки от угла поворота вала привода);
- нелинейность по моменту с учетом сил трения.

Проведено математическое моделирование, иллюстрирующее применение описанного подхода для практической задачи – оценки качества работы следящей системы.

Список литературы

1. *Мелкозеров П. С.* Приводы в системах автоматического управления (энергетический расчет и выбор параметров). М.:Л.: Энергия, 1966, 334 с.
2. *Семёнов А. В., Макаручук А. В.* Математическая модель заданной части электромеханической следящей системы с учетом ограничений // Мат. Всерос. науч. конф. «Теоретические и методические проблемы эффективного функционирования радиотехнических систем» (Системотехника-2013). Таганрог, 2013. С. 37–46.
3. *Семёнов А. В., Гайдук А. Р., Геложье Ю. А.* Математическая модель моментного электропривода // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск «Актуальные проблемы производства и потребления электроэнергии». Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. № 5 (94). С. 251–257.
4. *Юревич Е. И.* Теория автоматического управления. М.: Энергия. 1969. 375 с.
5. Методы классической и современной теории автоматического управления. В 3 т. Т. 1. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / Под ред. *Н. Д. Егупова*. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 748 с.
6. Следящие приводы. Кн. 1 / Под ред. *Б. К. Чемоданова*. М.: Энергия, 1976. 480 с.
7. *Шрейнер Р. Т.* Системы подчиненного регулирования электроприводов. Ч. 1. Электроприводы постоянного тока с подчиненным регулированием координат. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. проф.-пед. ун-та, 1997. 279 с.
8. *Гайдук А. Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.

Поступила 27.01.17



Чернов Антон Валерьевич – техник первой категории публичного акционерного общества «Научно-производственное объединение «Алмаз» имени академика А. А. Расплетина», г. Москва.

Область научных интересов: разработка и моделирование астатических следящих систем.

Семёнов Александр Валерьевич – кандидат технических наук, начальник отдела публичного акционерного общества «Научно-производственное объединение «Алмаз» имени академика А. А. Расплетина», старший преподаватель Московского физико-технического института, г. Москва.

Область научных интересов: теория автоматического управления, цифровая обработка сигналов, цифровая фильтрация, методы аналитического синтеза цифровых следящих систем, математическое моделирование динамических систем.

Mathematical model of tracking systems taking into account nonlinearities in state variables

Mathematical modelling makes it possible to verify correct operation of the system being designed before actually implementing it, but linear models do not enable us to evaluate the effect of structural constraints, taking which into account makes irregularities appear. We present an approach that allows us to design and implement a model of a dynamic tracking system using the coefficients of the desired transfer function to account for irregularities in the momentum and state variables. We present results of modelling in the *MATLAB/Simulink* environment taking various irregularities into account.

Keywords: tracking system, desired transfer function, state-space representation, nonlinearities of state variables, Cauchy normal form.

Chernov Anton Valerevich – Technician of the first rank, Public Joint-Stock Company Scientific and Production Association “ALMAZ R&P Corp.”, Moscow.

Science research interests: development and simulation of astatic tracking systems.

Semenov Aleksandr Valerevich – Candidate of Engineering Sciences, Head of Department, Public Joint-Stock Company Scientific and Production Association “ALMAZ R&P Corp.”, Assistant Professor, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow.

Science research interests: automatic control theory, digital signal processing, digital filtering, automatic synthesis methods for digital tracking systems, mathematical modelling of dynamic systems.